

Seminar:

Endogener technischer Fortschritt

Thema:

Monopolistic Competition and Optimum Product  
Diversity

by A. K. Dixit and J. E. Stiglitz

*American Economic Review 67 (1977)*

bearbeitet von:

Lin Himmelmann <sup>1</sup>

Oktober 1998

<sup>1</sup>Kontakt: [himmel@rumms.uni-mannheim.de](mailto:himmel@rumms.uni-mannheim.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Fragestellung . . . . .	2
1.2	Modellierung . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Konstante Elastizitäten</b>	<b>4</b>
2.1	Marktgleichgewicht . . . . .	4
2.1.1	Nachfrage Seite . . . . .	4
2.1.2	Firmenseite . . . . .	7
2.2	Beschränktes Optimum . . . . .	9
2.3	Unbeschränktes Optimum . . . . .	10
2.4	Vergleich der Ergebnisse . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Variable Elastizitäten</b>	<b>13</b>
3.1	Marktgleichgewicht . . . . .	13
3.2	Beschränktes Optimum . . . . .	15
3.3	Unbeschränktes Optimum . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>18</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>19</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Fragestellung

Eine zentrale Fragestellung in der Wohlfahrtsökonomie ist die, ob ein Marktgleichgewicht das Optimum bezüglich Menge und Vielfalt an produzierten Gütern erreicht.

Ein Marktgleichgewicht kann aber im allgemeinen aus verschiedenen Gründen nicht optimal sein. Notwendigerweise sollte ein Gut jedoch immer dann produziert werden, wenn die Kosten aus der Summe der Einnahmen und dem Wohlfahrtsgewinn der Konsumenten gedeckt werden können.

Wir werden uns also mit der Frage beschäftigen, in welchen Mengen und in welcher Vielfalt Güter produziert werden sollten. Zum Beispiel können mit positiven Fixkosten und konstanten Grenzkosten Ressourcen gespart werden, indem man weniger Güter in hoher Stückzahl herstellt. Jedoch hat man dann eine geringe Auswahl, was ein Wohlfahrtsverlust bedeutet.

### 1.2 Modellierung

Wir werden nun grundlegende Annahmen für ein Modell festlegen:

Erstens soll jedes potentiell produziertes Gut fixe Festkosten und konstante Grenzkosten haben.

Der höhere Nutzen für den Konsumenten, wenn er eine grössere Vielfalt an Gütern konsumieren kann, wurde durch viele indirekte Ansätze probiert zu modellieren. Wir wählen einen direkten Zugang, der sich aus der Konvexität einer gewöhnlichen Nutzenfunktion ergibt. Der abnehmende Grenznutzen impliziert, dass eine Mischung präferiert wird. Der Vorteil bei unserem Ansatz ist, dass die bisher bekannten Ergebnisse bezüglich der Elastizitäten erhalten bleiben, und daher leichter zu verstehen sind.

Weiter betrachten wir eine Ökonomie, in der wir die potentiell produzierten Güter, in verschiedene Wirtschaftssektoren einteilen. In einem Sektor werden alle Güter zusammengefasst, welche untereinander gute Substitute

sind. Aber jedes einzelne Gut ist ein schlechtes Substitut zu einem beliebigem Gut ausserhalb seines Sektors.

Dann können wir das Marktgleichgewicht mit einem Optimum, im Hinblick auf Zusammenhänge der Güter innerhalb eines Sektors und zwischen den Sektoren betrachten. Wir werden erwarten, dass die Ergebnisse von den intra- und intersektoralen Elastizitäten abhängen.

Um dieses so einfach wie möglich zu modellieren, greifen wir einen Wirtschaftssektor heraus, und kennzeichnen die potentiell produzierten Güter innerhalb des Sektors mit  $1, 2, 3, \dots$ . Die Mengen der verschiedenen Güter mit  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , sowie deren Preise mit  $p_1, p_2, p_3, \dots$ . An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass diese Etikettierung willkürlich ist, aber so erfolgen soll, dass genau die Güter  $1, 2, \dots, n$  produziert werden. Den Rest der Ökonomie aggregieren wir zu einem Gut 0, welches als Numeraire gewählt wird. Die Ausstattung der Ökonomie mit Gut 0 wird auf 1 normalisiert.

Wie schon erwähnt, wählen wir eine Nutzenfunktion mit konvexen Indifferenzkurven. Der Nutzen sei gegeben durch:

$$u = U(x_0, V(x_1, x_2, x_3, \dots)) \quad (1.1)$$

Der Anteil am Nutzen von unserem betrachteten Wirtschaftssektor ergibt sich aus  $V(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , der ebenfalls konvex in seinen Argumenten sein muss.

In den folgenden Kapiteln werden wir für die Funktionen U und V spezielle Objekte wählen.

Schliesslich wollen wir Verteilungsprobleme vernachlässigen. Die Nutzenfunktion U kann dann als repräsentativer Nutzen gesehen werden.

# Kapitel 2

## Konstante Elastizitäten

### 2.1 Marktgleichgewicht

#### 2.1.1 Nachfrage Seite

In diesem Kapitel wählen wir  $V(x_1, x_2, x_3, \dots) = \{\sum_i x_i^\alpha\}^{\frac{1}{\alpha}}$ . Damit ergibt sich mit (1.1) folgende Nutzenfunktion:

$$u = U \left( x_o, \left\{ \sum_i x_i^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \right) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.1)$$

Die Funktion U geben wir nicht explizit an, jedoch fordern wir, dass die Nutzenfunktion homogen in ihren Argumenten ist.

D.h.  $\forall \tau > 0 \quad \exists \delta > 0 : U \left( \tau x_o, \tau \left\{ \sum_i (x_i)^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \right) = \tau^\delta U \left( x_o, \left\{ \sum_i x_i^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \right)$ .

Damit folgen die gewünschten Eigenschaften:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

Die Budget Beschränkung lautet, falls n Güter produziert werden:

$$x_o + \sum_{i=1}^n p_i x_i = I \quad (2.2)$$

Hier ist I das Einkommen in Einheiten des Numeraire, d.h. die Ausstattung welche auf 1 normiert ist plus die Gewinne der Firmen an die Konsumenten bzw. die Transferzahlungen an die Firmen um Verluste abzudecken. In diesem Fall ist ein zweistufiger Optimierungsansatz gültig. Hierfür definieren wir einen Quantitäts-Index y und einen Preis-Index q wie folgt:

$$y = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.3)$$

$$q = \left\{ \sum_{i=1}^n p_i^{-\frac{1}{\beta}} \right\}^{-\beta} \quad \beta := \frac{1-\alpha}{\alpha} > 0$$

Es kann dann gezeigt werden, dass eine Funktion  $s(q) \in (0, 1)$  in Abhängigkeit von der Nutzenfunktion  $U$  existiert, für die gilt:

$$y = I \frac{s(q)}{q}, \quad x_0 = I(1 - s(q)) \quad (2.4)$$

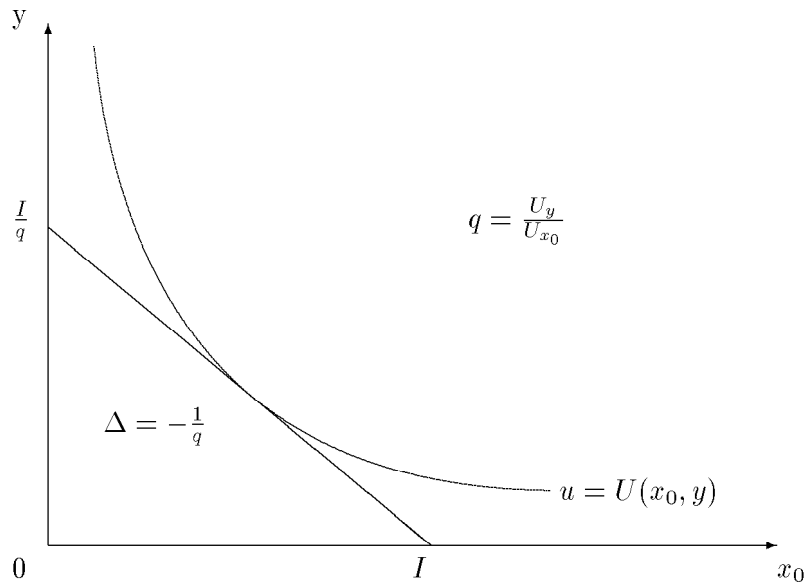
Dieses sind die Nachfragen der Güter in Abhängigkeit vom Preis-Index und Einkommen. Schreiben wir  $\sigma(q)$  für die Elastizität der Substitution zwischen  $x_0$  und  $y$ , und  $\theta(q)$  für die Elastizität der Funktion  $s(q)$ , so ergibt sich:

$$\theta(q) = \{1 - \sigma(q)\}\{1 - s(q)\} < 1 \quad (2.5)$$

Man beachte, dass  $\theta(q)$  negativ sein könnte, falls  $\sigma(q)$  grösser als 1 ist. Es ist leicht zu zeigen, dass gilt:

$$x_i = y \left( \frac{q}{p_i} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

Es folgt die Skizze:



Betrachten wir nun die Auswirkung der Änderung von  $p_i$  allein. Dieses betrifft  $x_i$  direkt, aber auch indirekt durch eine Änderung in  $q$  und  $y$ . Mit (2.3) erhalten wir die Elastizität:

$$\begin{aligned} \eta_{q, p_i} &= \frac{\partial q}{\partial p_i} \frac{p_i}{q} \\ &= -\beta (\sum_{i=1}^n p_i^{-\frac{1}{\beta}})^{-\beta-1} (-\frac{1}{\beta} p_i^{-\frac{1}{\beta}-1}) \frac{p_i}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sum_{i=1}^n p_i^{-\frac{1}{\beta}})^{-\beta-1} p_i^{-\frac{1+\beta}{\beta}} \frac{p_i}{q} \\
&= \frac{(\sum_{i=1}^n p_i^{-\frac{1}{\beta}})^{-1}}{p_i^{\frac{1}{\beta}}} = \left(\frac{q}{p_i}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad ] \\
\eta_{q,p_i} &= \left(\frac{q}{p_i}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Für den Fall, dass die Preise innerhalb unserer Gruppe die selbe Grössenordnung haben, ist der Einfluss eines jeden Preises  $p_i$  von der Ordnung  $1/n$  auf  $q$ . Wir nehmen an, dass  $n$  gross ist und somit können wir den Effekt der Änderung eines Preises  $p_i$  auf  $q$  vernachlässigen. Also auch den indirekten Effekt auf  $x_i$ . Dieses führt auf die Elastizität:

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{aligned} \eta_{x_i,p_i} &= \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{x_i} \\ &= yq^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(-\frac{1}{1-\alpha}\right) p_i^{-\frac{1}{1-\alpha}-1} \frac{p_i}{x_i} \\ &= \frac{-1}{1-\alpha} \end{aligned} \right] \\
\eta_{x_i,p_i} &= \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{-(1+\beta)}{\beta} \tag{2.8}
\end{aligned}$$

In der Terminologie von Chamberlin, ist dies die Elastizität der  $dd$ -Kurve. Dies ist die Nachfrage nach einem Gut in Abhängigkeit von seinem Preis, wobei alle anderen Preise konstant gehalten werden. In unserem grossen Gruppen-Fall (d.h.  $n$  gross) sehen wir, dass für  $i \neq j$ , die Kreuzelastizität  $\eta_{x_i,p_j}$  vernachlässigt werden kann, da eine einzelne Preisänderung keinen Einfluss auf  $q$  und  $y$  hat. Wenn sich jedoch alle Preise in der Gruppe annähern, summiert sich der einzelne kleine Effekt zu einer grossen Summe. Das korrespondiert mit der  $DD$ -Kurve von Chamberlin.

Um dies zu sehen, betrachten wir nun eine völlig symmetrische Situation, in der  $x_i = x$  und  $p_i = p$  für  $i = 1, \dots, n$ . Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
y &= xn^{1/\alpha} = xn^{1+\beta} \tag{2.9} \\
q &= pn^{-\beta} = pn^{-(1-\alpha)/\alpha}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis eingesetzt in (2.4) und (2.6) führt zu

$$x = \frac{Is(q)}{pn} \tag{2.10}$$

Die Elastizität, lässt sich leicht berechnen.

$$\eta_{x,p} = -1 (1 - \theta(q)) \tag{2.11}$$

Die Bedingung (2.5) garantiert, dass die  $DD$ -Kurve eine negative Steigung hat. Die herkömmliche Bedingung, dass die  $dd$ -Kurve elastischer ist als die

$DD$ -Kurve ist, lässt sich leicht durch Vergleich der Gleichungen (2.8) und (2.11) finden:

$$\left[ \begin{array}{l} dd\text{-Kurve elastischer als } DD\text{-Kurve} \\ \Leftrightarrow \left| -\frac{1+\beta}{\beta} \right| > |-1(1-\sigma(q))| \Leftrightarrow \frac{1+\beta}{\beta} > 1-\theta(q) \\ \Leftrightarrow 1+\beta > \beta - \beta\theta(q) \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} + \theta(q) > 0 \end{array} \right]$$

$$\frac{1}{\beta} + \theta(q) > 0 \quad (2.12)$$

Später wird sich zeigen, dass es sinnvoll erscheint diese Ungleichung als wahr anzunehmen, was auch aus folgender Überlegung plausibel ist: Wenn sich ein Preis in der Gruppe ändert, ohne dass die anderen Preise nachziehen, kann das verteuerte Gut gut durch die billigeren Produkte substituiert werden. Das kann nicht geschehen, wenn sich alle Preise in der Gruppe simultan ändern. Zum Schluss betrachten wir noch die aus (2.6) gewonnene Formel

$$\frac{x_i}{x_j} = \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad i \neq j \quad (2.13)$$

und erhalten daraus die die Elastizität der Substitution zwischen je zwei Gütern innerhalb der Gruppe, nämlich  $\frac{1}{1-\alpha}$ .

### 2.1.2 Firmenseite

Zunächst einmal kann man zeigen, dass jedes Gut von genau einer Firma hergestellt wird. Die Firmen sind Gewinnmaximierer und treten in den Markt ein bis die letzte Firma Nullgewinne macht. Wir befinden uns also in einer Situation monopolistischen Wettbewerbs.

Die Gewinnmaximierungsbedingung jeder Firma ergibt sich durch gleichsetzen von Grenzertrag und Grenzkosten.

Wie schon in Kapitel 1 erwähnt, setzen sich die Kosten eines beliebigen Gutes  $i$  aus fixen und konstanten variablen Kosten zusammen. Die Kostengleichung für ein Unternehmen lautet dann:  $p_i x_i = c x_i + a$ , wobei hier angenommen wird, dass alle Güter die gleichen Fixkosten  $a$  und Grenzkosten  $c$  haben. Man bekommt mit (2.8) und der Amoroso-Robinson-Relation:  $c = p_i \left( 1 + \frac{1}{\eta_{x_i, p_i}} \right) = p_i \left( 1 - \frac{\beta}{1+\beta} \right) = p_i \left( \frac{1}{1+\beta} \right)$ . Wir bezeichnen den allgemeinen Gleichgewichtspreis, der durch die obige Gleichung gegeben wird und unabhängig von der Anzahl der produzierten Güter ist mit  $p_e$ :

$$p_e = c(1 + \beta) = \frac{c}{\alpha} \quad (2.14)$$

Die zweite Bedingung für ein Gleichgewicht ergibt sich aus der Überlegung, dass die Firmen solange in den Markt eintreten, bis die nächste potentielle Firma einen Verlust erwirtschaften würde. Falls  $n$  gross ist, kann man

annehmen, dass die zuletzt eingetretene Firma genau Nullgewinne macht. Aus Symmetriegründen folgt dass jede Firma diese Bedingung erfüllt, die man umschreibt:  $p_i x_i = c x_i + a \Leftrightarrow (p_i - c) x_i = a$ . Dann ist  $I = 1$ , und wir können die Anzahl der aktiven Firmen bestimmen.

$$\left[ \begin{array}{l} x \stackrel{(2.10)}{=} I \frac{s(q)}{pn} \Rightarrow \frac{a}{p-c} = 1 \frac{s(q)}{pn} \\ \stackrel{(2.9)(1.14)}{\Rightarrow} \frac{a}{c+c\beta-c} = \frac{s(pn^{-\beta})}{pn} \\ \Rightarrow \frac{a}{c\beta} = \frac{s(pn^{-\beta})}{pn} \end{array} \right]$$

$$\frac{s(p_e n_e^{-\beta})}{p_e n_e} = \frac{a}{c\beta} \quad (2.15)$$

Einheitlich wird angenommen, dass  $s(p_e n_e^{-\beta})/p_e n_e$  eine monotone Funktion in  $n$  ist. Aus (2.10) kann man dann ableiten, wie sich die  $DD$ -Kurve verschiebt, wenn die Anzahl der Firmen  $n$  steigt. Es ist natürlich anzunehmen, dass sie sich nach links verschiebt. Denn diese Bedingung ausgedrückt in Elastizitäten ist

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial n} \frac{n}{x} = \left( \frac{(-\beta)pn \frac{\partial s}{\partial q} n^{-\beta-1} - p s(q)}{p^2 n^2} \right) \frac{pn^2}{s(q)} \\ = (-\beta) \frac{\partial s}{\partial q} \frac{pn^{-\beta}}{s(q)} - 1 = -\beta\theta(q) - 1 < 0 \end{array} \right]$$

$$1 + \beta\theta(q) > 0 \quad (2.16)$$

Dieses ist die gleiche Bedingung wie in (2.12), nämlich dass die  $DD$ -Kurve elastischer ist als die  $dd$ -Kurve. Aus Plausibilitätsgründen sollten wir wie schon vorher erwähnt annehmen, dass diese gilt. Wenn also die Anzahl der Firmen steigt, wird jede Firma einen geringeren Output haben wenn der Preis  $p$  konstant bleibt. Mit (2.10) und (2.15), können wir nun den Gleichgewichtoutput für jede Firma berechnen.

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{s(p_e n_e^{-\beta})}{p_e n_e} \stackrel{(2.15)}{=} \frac{a}{c\beta} \stackrel{(2.10)}{\Rightarrow} x_e = \frac{a}{\beta c} \end{array} \right]$$

$$x_e = \frac{a}{\beta c} \quad (2.17)$$

Für die noch folgenden Vergleiche definieren wir zusätzlich:

$$s_e = s(q_e) \quad , \quad q_e = p_e n_e^{-\beta} \quad (2.18)$$

## 2.2 Beschränktes Optimum

Das Ziel das hier verfolgt wird, ist der Vergleich des Gleichgewichts mit dem beschränkten Optimum. Beschränkt soll das Gleichgewicht allein dadurch sein, dass die Firmen keine Verluste erwirtschaften dürfen. Die Aufgabe besteht also darin,  $n$ ,  $p_i$  und  $x_i$  so zu wählen, dass der Nutzen maximiert wird, unter Befriedigung der Nachfragefunktion und dass die Firmen nicht-negativen Gewinn haben. Das Problem wird an dieser Stelle vereinfacht, indem bereits das Ergebnis benutzt wird, dass alle aktiven Firmen aus Symmetriegründen Nullgewinne erwirtschaften und dieselben Preise haben. Die Nullgewinnbedingung muss gelten, da sonst andere Firmen in den Markt eintreten würden. Schliesslich müssen im Optimum alle  $x_i$  aufgrund der Beschaffenheit der Nutzenfunktion gleich sein. Dann können wir wieder  $I = 1$  setzen, und (2.4) benutzen, um den Nutzen als Funktion in  $q$  darzustellen. Diese Funktion hat natürlich eine negative Steigung. Das Problem, den Nutzen zu maximieren, ist äquivalent damit  $q$  zu minimieren.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \max_{x,p,n} U(x_0, y) \quad \text{u.d.Nb.:} \begin{cases} x_0 = I(1 - s(q)) \\ y = Is(q)/q \\ x(p - c) = a \end{cases} \right. \\
 & \stackrel{(2.9)}{\Rightarrow} \max_{x,p,n} U(x_0, y) \quad \text{u.d.Nb.:} \begin{cases} x_0 = 1 - s(q) \\ xn^{1+\beta} = s(q)/q \\ x(p - c) = a \end{cases} \\
 & \Rightarrow \min_{p,n} pn^{-\beta} \quad \text{u.d.Nb.:} \begin{cases} x_0 = 1 - s(pn^{-\beta}) \\ x = s(pn^{-\beta})/pn \\ x(p - c) = a \end{cases} \left. \right] \\
 & \min_{p,n} pn^{-\beta} \quad \text{u.d.Nb.:} \quad (p - c) \frac{s(pn^{-\beta})}{pn} = a \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Um das Minimierungsproblem zu lösen berechnen wir jeweils die logarithmische Grenzrate der Substitution bzw. Transformation entlang der Budgetkurve und setzen diese gleich.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \text{Die Berechnung geschieht wie folgt:} \\
 & \quad pn^{-\beta} = \overset{\circ}{q} \Leftrightarrow n = \overset{\circ}{q}^{-1/\beta} p^{1/\beta} \\
 & \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial p} \frac{p}{n} = \overset{\circ}{q}^{-1/\beta} \frac{1}{\beta} p^{1/\beta-1} \frac{p}{\overset{\circ}{q}^{-1/\beta} p^{1/\beta}} = \frac{1}{\beta} \\
 & \text{In analoger Weise die zweite Berechnung} \left. \right]
 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{\frac{c}{p-c} + \theta(q)}{1 + \beta\theta(q)} = \frac{1}{\beta} \quad (2.20)$$

Diese umgeschrieben liefert den beschränkten Optimumspreis

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\frac{c}{p-c} + \theta(q)}{1 + \beta\theta(q)} = \frac{1}{\beta} \\ \Leftrightarrow \frac{c}{p-c} + \theta(q) = \frac{1}{\beta} + \theta(q) \\ \Leftrightarrow \beta c = p - c \end{array} \right]$$

$$p_c = c(1 + \beta) \quad (2.21)$$

Wenn man das Resultat mit Gleichung (2.14) vergleicht, sieht man das dieser Preis gleich dem Gleichgewichtspreis  $p_e$  ist. Da in beiden Situationen die Nullgewinnbedingung erfüllt ist, ist auch die Produktmenge und die Anzahl der Firmen dieselbe. Alle anderen Variablen können aus diesen Grössen gewonnen werden, und somit ist die Marktgleichgewichtsallokation welche sich einstellt gleich dem beschränkten Optimum.

## 2.3 Unbeschränktes Optimum

In diesem Abschnitt wird keine einschränkende Forderung an das Optimum gestellt. Wieder ergibt sich durch die Konvexität der Nutzenfunktion, dass alle aktiven Firmen den selben Output produzieren. Also suchen wir die Anzahl  $n$  der aktiven Firmen die alle den Output  $x$  produzieren, um den Nutzen zu maximieren:

$$u = U(1 - n(a + cx), xn^{1+\beta}) \quad (2.22)$$

$$\left[ \begin{array}{l} x_o = I - npx \\ I - 1 = n(px - cx - a) \\ \Leftrightarrow I - npx = 1 - na - ncx \\ x_o = 1 - na - ncx \end{array} \right]$$

Die Bedingungen erster Ordnung sind

$$-ncU_0 + n^{1+\beta}U_y = 0 \quad (2.23)$$

$$-(a + cx)U_0 + (1 + \beta)xn^\beta U_y = 0 \quad (2.24)$$

Mit dem Optimierungsansatz des 1.ten Teils wissen wir, dass  $q = U_y/U_0$ . Mit (2.23) und (2.9) sehen wir, dass der Preis  $p_u$  im unbeschränkten Optimum gleich den Grenzkosten sein muss.

$$\left[ \begin{array}{l} (2.23) \Rightarrow ncU_0 = n^{1+\beta}U_y \\ \Rightarrow \frac{U_y}{U_0} = \frac{nc}{n^{1+\beta}} \Rightarrow \frac{U_y}{U_0} = cn^{-\beta} \\ \Rightarrow q \stackrel{(2.9)}{=} pn^{-\beta} = cn^{-\beta} \end{array} \right]$$

$$p_u = c \quad (2.25)$$

Aus den beiden Bedingungen erster Ordnung erhält man:

$$\left[ \begin{array}{l} x(1 + \beta)(2.23) - n(2.24) \Rightarrow \\ -(1 + \beta)ncxU_0 + (1 + \beta)n^{1+\beta}xU_y = \\ -n(a + cx)U_0 + n(1 + \beta)xn^\beta U_y \Rightarrow \\ (1 + \beta)cx = (a + cx) \Rightarrow \beta cx = a \end{array} \right]$$

$$x_u = \frac{a}{c\beta} \quad (2.26)$$

Nun sehen wir mit (2.25), dass jede Firma ihre variablen Kosten deckt. Daraus ergeben sich die Transferzahlungen in Höhe von  $an$  an die Firmen, um die Kosten zu decken. Also ist  $I = 1 - an$ , und  $x = (1 - an) \frac{s(pn^{-\beta})}{pn}$ . Die Anzahl der Firmen wird dann implizit durch folgende Gleichung gegeben:

$$\frac{s(cn_u^{-\beta})}{n_u} = \frac{a/\beta}{1 - an_u} \quad (2.27)$$

## 2.4 Vergleich der Ergebnisse

Wie wir schon vorher erörtert haben liefert das Marktgleichgewicht und das beschränkte Optimum die selben Ergebnisse. Im folgenden reicht es also das Marktgleichgewicht mit dem unbeschränkten Optimum zu vergleichen. Unmittelbar aus (2.14) und (2.25) ergibt sich dass der unbeschränkte Optimumspreis  $p_u$  kleiner als der Gleichgewichtspreis  $p_e$  ist .

$$p_u < p_e \quad (2.28)$$

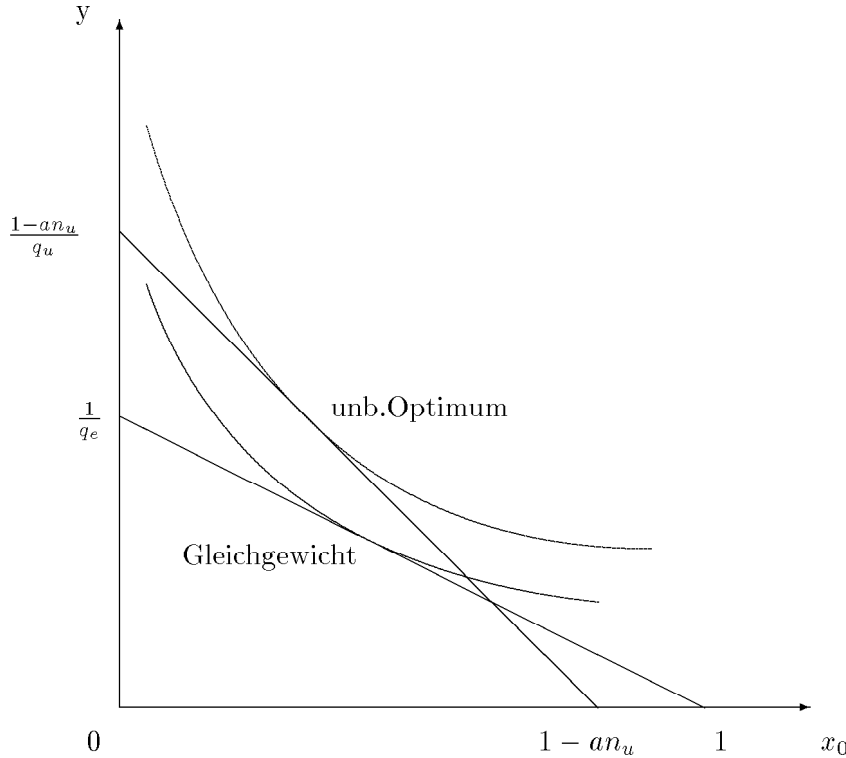
Das bemerkenswerteste Resultat ist, dass der Output jeder aktiven Firma in beiden Situationen gleich ist. Dies sehen wir aus (2.17) und (2.26).

$$x_u = x_e \quad (2.29)$$

Ein direkter Vergleich der Anzahl der Firmen aus (2.15) und (2.27) ist kaum möglich. Wenn man sich aber klar macht, dass das unbeschränkte Optimum einen höheren Nutzen für die Konsumenten bringt als die Gleichgewichtsallokation, und das Einkommen kleiner ist, dann muss also für die Preis-Indexe gelten:

$$q_u < q_e \quad (2.30)$$

Dieser Sachverhalt kann anhand der folgenden Skizze klargemacht werden:



Da man beim unbeschränkten Optimum Transferzahlungen an die Firmen zu leisten hat, können die Konsumenten falls sie ihr gesamtes Einkommen für die Verwendung von  $x_0$  ausgeben, weniger davon kaufen. Da aber der Nutzen höher ist, muss die Budgetgerade des Gleichgewichts (beschränkten Optimums) geschnitten werden. Dies kann nur geschehen, wenn die Steigung gross genug ist, was bedeutet, dass die Bedingung  $q_u < q_e$  erfüllt sein muss. Das gefundene unbeschränkte Optimum muss einen höheren Wert an  $y$  haben, als das Marktgleichgewicht. Die Outputs der aktiven Firmen sind jeweils gleich, und somit gilt in Verbindung mit (2.9):

$$n_u > n_e \quad (2.31)$$

Im unbeschränkten Optimum ist also die Vielfalt der Güter grösser als im Gleichgewicht.

Im Bezug auf den Konsum von  $x_0$ , stellen wir zunächst durch Umformen fest:  $x_{0u} = I - n_u p_u x_u = 1 - n_u a - n_u c x_u = 1 - n_u (a + c x_u)$ .

Es gilt auch:  $x_{0e} = 1 - n_e p_e x_e = 1 - n_e (a + c x_e)$ .

Mit (2.29) und (2.31) bekommt man:

$$x_{0u} < x_{0e} \quad (2.32)$$

Im beschränkten Optimum wird man also weniger von Gut 0 nachfragen.

## Kapitel 3

# Variable Elastizitäten

### 3.1 Marktgleichgewicht

In diesem Fall wählen wir eine allgemeinere Form für  $V(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , bei der keine konstante intersektorale Substitution mehr gelten muss.  $U$  wählen wir zur Vereinfachung in Form einer Cobb-Douglas-Funktion. Die Nutzenfunktion lautet dann:

$$u = x_0^{1-\gamma} \left( \sum_i v(x_i) \right)^\gamma \quad (3.1)$$

wobei  $v$  eine steigende konkave Funktion ist und  $0 < \gamma < 1$ . In diesem Fall ist der Gruppennutzen  $V(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_i v(x_i)$  im allgemeinen nicht homothetisch.

Es kann gezeigt werden, dass die Elastizität der  $dd$ -Kurve in dem grossen Gruppen Fall ( $n$  gross) gegeben ist durch:

$$\eta_{x_i, p_i} = \frac{v'(x)}{x_i v''(x_i)} \quad \forall i \quad (3.2)$$

Im Unterschied zum vorherigem Fall, ist die Elastizität also abhängig von  $x_i$ , und nicht konstant.

Um die Unterschiede und Ähnlichkeiten besser herausstellen zu können definieren wir  $\beta(x)$  durch:

$$\begin{aligned} \beta(x) &:= \frac{-xv''(x)}{v'(x)+xv''(x)} \\ \Leftrightarrow \frac{1+\beta(x)}{\beta(x)} &= -\frac{v'(x)}{xv''(x)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Als nächstes setzen wir wieder  $x_i = x$  und  $p_i = p$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann können wir die  $DD$ -Kurve und die Nachfrage nach dem Numeraire angeben als (vgl.2.2):

$$x = \frac{I}{np} \omega(x) \quad , \quad x_0 = I(1 - \omega(x)) \quad (3.4)$$

mit  $\omega(x)$  definiert als:

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \frac{\gamma\alpha(x)}{\gamma\alpha(x) + (1-\gamma)} \\ \alpha(x) &= \frac{xv'(x)}{v(x)}\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \max_{x_0, x} x_0^{1-\gamma} n^\gamma v(x)^\gamma \quad \text{n.d.Nb.: } x_0 + np x = I \\ \mathcal{L}(x_0, x) = x_0^{1-\gamma} n^\gamma v(x)^\gamma + \lambda(x_0 + np x - I) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_0} = (1-\gamma)x_0^{-\gamma} n^\gamma v(x)^\gamma + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \gamma x_0^{1-\gamma} n^\gamma v(x)^{\gamma-1} v'(x) + \lambda np = 0 \\ \Rightarrow \frac{\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{x_0 v'(x)}{v(x)} \right) = np \\ \Rightarrow x_0 + np x = \frac{1-\gamma}{\gamma} np \frac{v(x)}{v'(x)} + np x = I \\ \Leftrightarrow \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{v(x)}{v'(x)} + x = \frac{I}{np} \\ \Leftrightarrow x \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{v(x)}{v'(x)x} + 1 \right) = \frac{I}{np} \\ \Leftrightarrow x = \frac{I}{np} / \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{1}{\alpha(x)} + 1 \right) \\ \Leftrightarrow x = \frac{I}{np} \frac{\gamma\alpha(x)}{\gamma\alpha(x) + (1-\gamma)} \\ \text{einsetzen} \Rightarrow x_0 = I(1 - \omega(x)) \end{array} \right]$$

Aus der Konkavität von  $v(x)$  folgt, dass  $0 < \alpha(x) < 1$  ist, und damit auch  $0 < \omega(x) < 1$ .

Betrachte nun die Gleichgewichtssituation unter Berücksichtigung der Firmenseite. Wie im vorherigem Kapitel haben wir eine monopolistische Wettbewerbs Situation. Die Gewinnmaximierungsbedingung für jede aktive Firma liefert den Gleichgewichtspreis  $p_e$  in Abhängigkeit vom gleichgewichtigen Output  $x_e$  :

$$\left[ \begin{array}{l} p \left( 1 + \frac{1}{\eta_{x,p}} \right) = c \\ \Rightarrow p \left( 1 + \frac{1}{\frac{\beta(x)}{1+\beta(x)}} \right) = c \\ \Rightarrow p \left( \frac{1}{1+\beta(x)} \right) = c \end{array} \right]$$

$$p_e = c(1 + \beta(x_e))\tag{3.6}$$

Betrachte hier die Ähnlichkeit mit (2.14). Benutzen wir in (3.6) die Nullgewinnbedingung, so haben wir  $x_e$  definiert durch:

$$\left[ \begin{array}{l} p \left( \frac{1}{1+\beta(x)} \right) = c \\ \Rightarrow \frac{1}{1+\beta(x)} = \frac{cx}{px} = \frac{cx}{a+cx} \end{array} \right]$$

$$\frac{cx_e}{a + cx_e} = \frac{1}{1 + \beta(x_e)} \quad (3.7)$$

Die Anzahl der Firmen kann nun durch die  $DD$ -Kurve und die Nullgewinnbedingung berechnet werden:

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{1}{np}\omega(x) \\ \Rightarrow 1 = \frac{1}{(a+cx)n}\omega(x) \\ \Rightarrow n = \frac{\omega(x)}{a+cx} \end{array} \right]$$

$$n_e = \frac{\omega(x_e)}{a + cx_e} \quad (3.8)$$

### 3.2 Beschränktes Optimum

Kommen wir nun zum beschränktem Optimum. Wir wählen  $n$  und  $x$ , so dass der Nutzen maximiert wird und die Nullgewinnbedingung erfüllt bleibt. Durch Einsetzen kann man  $u$  als eine Funktion in alleiniger Abhängigkeit von  $x$  angeben.

$$\left[ \begin{array}{l} u = x_0^{1-\gamma} n^\gamma v(x)^\gamma \\ \stackrel{\text{Nullgew.}}{=} (1 - \omega(x))^{1-\gamma} n^\gamma v(x)^\gamma \\ \stackrel{(3.5)}{=} n^\gamma v(x)^\gamma \left( \frac{\gamma\alpha(x) + (1-\gamma) - \gamma\alpha(x)}{\gamma\alpha(x) + (1-\gamma)} \right)^{1-\gamma} \\ \stackrel{n=\omega(x)/px}{=} v(x)^\gamma (\omega(x)^\gamma \left( \frac{1}{a+cx} \right)^\gamma \left( \frac{1-\gamma}{\gamma\alpha(x) + (1-\gamma)} \right)^{1-\gamma}) \\ = \left( \frac{v(x)}{a+cx} \right)^\gamma (1-\gamma)^{1-\gamma} \gamma^\gamma \alpha(x)^\gamma \frac{1}{\gamma\alpha(x) + (1-\gamma)} \\ = \gamma^\gamma (1-\gamma)^{(1-\gamma)} \left( \frac{\alpha(x)v(x)}{a+cx} \right)^\gamma \frac{1}{\gamma\alpha(x) + (1-\gamma)} \end{array} \right]$$

$$u = \gamma^\gamma (1-\gamma)^{(1-\gamma)} \frac{\left( \frac{\alpha(x)v(x)}{a+cx} \right)^\gamma}{\gamma\alpha(x) + (1-\gamma)} \quad (3.9)$$

Die Bedingung erster Ordnung  $\partial u / \partial x = 0$  definiert implizit  $x_c$ :

$$\frac{cx_c}{a + cx_c} = \frac{1}{1 + \beta(x_c)} - \frac{\omega(x_c)x_c\alpha'(x_c)}{\gamma\alpha(x_c)} \quad (3.10)$$

Wenn man dies mit (3.7) vergleicht und die Bedingung zweiter Ordnung benutzt (es kann gezeigt werden, dass  $\alpha'(x)$  unabhängig von  $x$  entweder positiv oder negativ ist) ergibt sich:

$$\alpha'(x) <> 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_c >< x_e \quad (3.11)$$

Da die Nullgewinnbedingung gelten soll, liegen die Punkte  $(x_c, p_c)$  und  $(x_e, p_e)$  auf der gleichen fallenden Durchschnittskostenkurve, und deshalb gilt

$$x_c > < x_e \quad \Leftrightarrow \quad p_c > < p_e \quad (3.12)$$

Aus mikroökonomischen Überlegungen weiss man, dass die *dd*-Kurve tangential an der Durchschnittskostenkurve im Punkt  $(x_e, p_e)$  verläuft. Die *DD*-Kurve ist in diesem Punkt flacher (nicht so elastisch). Falls  $x_c > x_e$  muss der Punkt  $(x_c, p_c)$  auf einer *DD*-Kurve weiter rechts liegen, als  $(x_e, p_e)$ . Diese Verschiebung der *DD*-Kurve kann nur aus einer Verringerung der Anzahl der Firmen resultieren. Das Gegenteil folgt aus  $x_c < x_e$ . Also haben wir:

$$x_c > < x_e \quad \Leftrightarrow \quad n_c < > n_e \quad (3.13)$$

Schliesslich zeigt (3.11), dass  $\alpha(x_c) < \alpha(x_e)$ , und damit aus der Definition von  $\omega(x)$ :  $\omega(x_c) < \omega(x_e)$ . Aus (3.4) folgt nun

$$x_{0c} > x_{0e} \quad (3.14)$$

### 3.3 Unbeschränktes Optimum

Um das unbeschränkte Optimum zu finden, muss man  $n$  und  $x$  finden, um  $u$  zu maximieren:

$$\left[ \begin{array}{l} u(x_0, y) = x_0^{1-\gamma} (nv(x))^\gamma = (1 - n(a + cx))^{1-\gamma} (nv(x))^\gamma \\ \max_{n,x} (nv(x))^\gamma (1 - n(a + cx))^{1-\gamma} \end{array} \right] \quad (3.15)$$

Es ist leicht zu zeigen, dass folgendes gilt

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Grenzertrag} = \text{Grenzkosten} \\ p_u = c \end{array} \right] \quad (3.16)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{cx_u}{a + cx_u} = \alpha(x_u) \end{array} \right] \quad (3.17)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{substituiere } p \text{ durch } c \text{ in: } n = \frac{I\omega(x)}{px} \\ n_u = \frac{\gamma}{a + cx_u} \end{array} \right] \quad (3.18)$$

Dann können wir die Bedingung zweiter Ordnung benutzen, um zu zeigen, dass

$$\alpha'(x) <_> 0 \Leftrightarrow x_u >_< x_c \quad (3.19)$$

Dieses ist transitiv mit (3.11), und führt deshalb zu ähnlichen Output-Vergleichen wie zwischen Gleichgewicht und unbeschränktem Optimum.

Der Preis im unbeschränkten Optimum ist natürlich der niedrigste.

$$p_u < \min\{p_c, p_\epsilon\} \quad (3.20)$$

Im Bezug auf die Anzahl der Firmen, kann man aus der Definition von  $\omega(x)$  in (3.5) folgende Ungleichung verifizieren.

$$n_c = \frac{\omega(x_c)}{a + cx_c} < \frac{\gamma}{a + cx_c} \quad (3.21)$$

und daraus ergibt sich folgende Implikation:

$$x_u < x_c \quad \Rightarrow \quad n_u > n_c \quad (3.22)$$

Das gleiche gilt wegen (3.8) für das Gleichgewicht.

Dieses lässt die Möglichkeit offen, ob das unbeschränkte Optimum sowohl mehr als auch grössere Firmen hat. Das ist nicht ganz unwahrscheinlich, da im unbeschränkten Optimum die Ressourcen effizienter genutzt werden.

## Kapitel 4

# Zusammenfassung

Es wurden hier einige Unterschiede zwischen Gleichgewicht und Optimum bezüglich der Vielfalt und Menge der produzierten Güter in einer Volkswirtschaft besprochen. Wir wollen noch einmal kurz die wichtigsten Ergebnisse zusammenstellen.

- Im ersten Fall der konstanten Elastizitäten, hat sich herausgestellt, dass das Marktgleichgewicht gleich dem beschränkten Optimum ist, und somit pareto optimal, und das unabhängig vom Betrag der Elastizität.  
Das unbeschränkte Optimum hat einen niedrigeren Preis. Vor allem aber ist die Outputmenge dieselbe, wobei die Vielfalt der produzierten Güter höher ist.
- Mit variablen Elastizitäten bekamen wir als Vergleich zwischen Gleichgewicht und Optimum, dass entweder mehr pro Gut produziert wurde und dafür die Vielfalt geringer war. Oder umgekehrt weniger pro Gut produziert wurde, dafür aber die Vielfalt grösser war.  
Im unbeschränkten Optimum war der Preis der geringste. Die Outputmenge war hier entweder die kleinste oder die grösste. Hatte das unbeschränkte Optimum die kleinste Outputmenge, so hatte es zumindest die grösste Vielfalt. Für den Fall der grössten Outputmenge, war nicht notwendig die Vielfalt die geringste. Daher ist durchaus möglich, dass im unbeschränkten Optimum sowohl mehr produziert wird, als auch die Vielfalt grösser ist.

Ich hoffe, dass die hier präsentierten Fälle, in Verbindung mit anderen Problemstellungen, nützliche und neue Einsichten geben.

# Literaturverzeichnis

- [1] A.K.Dixit and D.L.Stiglitz "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity" American Economic Review 67 University Warwick, England 1975
- [2] H.R.Varian "Grundzüge der Mikroökonomik " Oldenbourg Verlag 1989
- [3] R.J.Barro "Makroökonomie " Oldenbourg Verlag 1992
- [4] J.Janich / W.Jakobs "Mikro leichtgemacht" Trendenz Marketing Services Thomas Schiefer / Verlag, Mannheim 1995